SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

L. ZANGHIRATI

OPERATORI PSEUDODIFFERENZIALI DI TIPO GEVREY DI ORDINE INFINITO

3 MAGGIO 1984

Vari autori hanno rivolto la loro attenzione allo studio di operatori pseudodifferenziali di tipo Gevrey: ricordiamo Boutet de Monvel-Kreé [5], Valievic [12], e più recentemente, Hashimoto-Matsuzawa--Morimoto [6], Iftimie [8], Liess-Rodino [11].

In [5], [12], [6] sono considerati operatori con simboli classici, o più generalmente appartenenti alle classi $S^m_{\rho,\delta}(\Omega)$ di Hörmander [7], cioè soddisfacenti, per ogni sottoinsieme compatto $k \subset \Omega$, alla stima:

$$\sup_{x \in K} |D^\alpha_\xi D^\beta_x p(x,\xi)| \leq c_{K,\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|} \quad , \quad |\xi| \gg$$

con costanti $c_{K,\alpha,\beta}$ per le quali viene precisata la dipendenza da α e β.

I simboli considerati in [11], pur contenendo quelli classici, possono essere riguardati, dal punto di vista C^∞, come appartenenti alle classi di Beals [3]. Essi operano su classi Gevrey anisotrope generalizzate.

In ogni caso gli operatori considerati dagli autori sopracitati sono definiti su $C^\infty_0(\Omega)$ e sono di ordine finito. Osserviamo però che se si cerca la più larga classe di funzioni $p(x,\xi) \in C^\infty(\Omega \times \mathbf{R}^n)$ per la quale l'operatore:

$$p(x,D)\, u(x) = (2\Pi)^{-n} \int e^{i\langle x,\xi\rangle} p(x,\xi)\, \hat{u}(\xi)\, d\xi$$

sia definito sulle funzioni Gevrey di ordine $\theta > 1$ con supporto compatto in Ω, subito ci si accorge, utilizzando il teorema di Paley-Wiener, che non è necessario che $\xi \to p(\cdot,\xi)$ sia a crescenza lenta. In effetti basta che per ogni $\varepsilon > 0$ esista una costante $c_\varepsilon > 0$ tale che:

$$|p(x,\xi)| \leq c_\varepsilon \exp(\varepsilon|\xi|^{1/\theta}) \qquad , \quad |\xi| \gg$$

Simboli soddisfacenti più generalmente alla stima:

$$|p(x,\xi)| \leq c_\varepsilon \exp(\varepsilon|\xi|) \qquad , \quad |\xi| \gg$$

sono detti di "ordine infinito". Tali sono, per esempio, i simboli degli operatori ultradifferenziali [9], ed i simboli analitici di Boutel de Mouvel [4] ed Aoki [1],[2] .

Partendo dall'osservazione precedente è possibile definire classi di operatori di ordine infinito che operano su spazi di funzioni Gevrey e sui loro duali e che sono Gevrey-pseudolocali.

Per i corrispondenti simboli vengono stabilite le regole del calcolo simbolico classico.

In particolare per operatori soddisfacenti una "condizione di ipoellitticità" è possibile provare l'esistenza di una parametrice (Teorema 2.3). Questo teorema estende alle ultradistribuzioni e ad operatori di ordine infinito il teorema 3.1 di [6].

Esempi di operatori Gevrey di ordine infinito sono quelli con simbolo della forma:

$$p(x,\xi) = \exp(\langle x, \phi(\xi)\rangle) ,$$

con $\phi = (\phi_1,\ldots,\phi_n)$, ϕ_j simbolo classico di ordine minore di 1, come pure quelli con simbolo:

$$p(x,\xi) = \exp(-i\int_0^{x_n} a(x',t,\xi)dt)$$

con $a(x',x_n,D)$ operatore pseudodifferenziale analitico classico di ordi-

ne minore di 1.

Operatori di quest'ultima forma compaiono naturalmente, ad esempio, nell'integrazione della così detta "equazione del trasporto":

$$\frac{\partial p}{\partial x_n} + i\, a\, p = 0$$

Nel seguito indicheremo con $G^{(\theta)}(\Omega)$, $\theta > 1$, Ω un sottoinsieme aperto di $\mathbf{R}^n$, lo spazio delle funzioni $f \in C^\infty(\Omega)$ tali che per ogni compatto $K \subset \Omega$ esiste una costante c_k per la quale riesce:

$$\sup_K |D^\alpha f| \leq c_k^{|\alpha|+1} \alpha!^\theta \quad , \quad \alpha \in \mathbf{Z}_+^n .$$

Indicheremo poi con $G_0^{(\theta)}(\Omega)$, $G^{(\theta)}(\Omega) \cap C_0^\infty(\Omega)$, e con $G_0^{(\theta)'}(\Omega)$, $G^{(\theta)'}(\Omega)$ i duali di $G_0^{(\theta)}$ e di $G^{(\theta)}$ rispettivamente. Per le topologie e le proprietà di tali spazi si veda, ad esempio [9], [10].

Siano θ, ρ, δ numeri reali tali che $\theta > 1$, $0 \leq \delta < \rho \leq 1$; $\theta\rho \geq 1$.

1. Definizione. *Indicheremo con* $S^{\infty,\theta}_{\rho,\delta}(\Omega)$ *lo spazio delle funzioni* $p \in C^\infty(\Omega \times \mathbf{R}^n)$ *soddisfacenti la seguente condizione: per ogni compatto* $k \subset \Omega$ *esistono costanti* C *e* B *e per ogni* $\varepsilon > 0$ *una costante* c_ε *tale che:*

$$(1) \qquad |D_\xi^\alpha D_x^\beta p(x,\xi)| \leq c_\varepsilon\, c^{|\alpha+\beta|}\, \alpha!\beta!^{\theta(\rho-\delta)} (1+|\xi|)^{-\rho|\alpha|+\delta|\beta|} \exp(\varepsilon\, |\xi|^{1/\theta}),$$

per $\alpha,\beta \in \mathbf{Z}_+^n$ *e per* $x \in K$, $\xi \in \mathbf{R}^n$ *con* $|\xi| > B|\alpha|^\theta$.

Se $p \in S^{\infty,\theta}_{\rho,\delta}(\Omega)$, l'operatore pseudodifferenziale associato a p è definito, per $u \in G_0^{(\theta)}(\Omega)$, da:

$$(2) \qquad P(x,D)\, u(x) = (2\pi)^{-n} \int \exp(i\langle x,\xi\rangle)\, p(x,\xi)\, \hat{u}(\xi)\, d\xi,$$

dove $\hat{u}(\xi) = \int \exp(-i\langle x,\xi\rangle)\, u(x)dx$.

Indicheremo con $OPS^{\infty,\theta}_{\rho,\delta}(\Omega)$ lo spazio degli operatori della forma (2).

Il Teorema di Paley-Wiener per funzioni Gevrey assicura la assoluta convergenza dell'integrale a secondo membro di (2) e consente di derivare sotto il segno di integrale. In effetti si ha:

Teorema. *Se* $p \in S^{\infty,\theta}_{\rho,\delta}(\Omega)$, *allora* $P(\cdot,D)$ *definito da* (2) *è un operatore lineare continuo da* $G_0^{(\theta)}(\Omega)$ *a* $G^{(\theta)}(\Omega)$ *che può essere esteso ad un operatore continuo da* $G^{(\theta)'}(\Omega)$ *a* $G_0^{(\theta)'}(\Omega)$.

L'ultima affermazione del Teorema 2 è conseguenza del seguente:

3. Lemma . *Sia* $p \in S^{\infty,\theta}_{\rho,\delta}(\Omega)$ *e* $v \in G_0^{(\theta)}(\Omega)$. *Per ogni* $\varepsilon > 0$ *esistono costanti positive* b_ε, c_ε *tali che:*

$$\left|\int \exp(i\langle x,\eta\rangle)\, p(x,\xi)v(x)dx\right| \leq c_\varepsilon \exp(-2\varepsilon|\eta|^{1/\theta} + \varepsilon|\xi|^{1/\theta})$$

per $\xi, \eta \in \mathbf{R}^n$, $|\eta| > b_\varepsilon$.

Il Teorema 2 assicura che $P(x,D) \in OPS^{\infty,\theta}_{\rho,\delta}(\Omega)$ definisce un'applicazione continua da $G_0^{(\theta)}(\Omega)$ a $G_0^{(\theta)'}(\Omega)$. Quindi per il Teorema del nucleo per ultradistribuzioni [10] , esiste una ad una sola ultradistribuzione $K \in G_0^{(\theta)'}(\Omega \times \Omega)$ tale che:

$$\langle K, u \otimes v\rangle = \langle P(\cdot,D)u , v\rangle \quad , \; u,v \in G_0^{(\theta)}(\Omega).$$

K dicesi il nucleo di $P(\cdot,D)$. Formalmente:

$$K(x,y) = (2\pi)^{-n} \int \exp(i\langle x-y,\xi\rangle)\, p(x,\xi)\, d\xi.$$

4. Lemma. *Il nucleo* K *di* $P(\cdot,D) \in OPS^{\infty,\theta}_{\rho,\delta}(\Omega)$ *è in* $G^{(\theta)}(\Omega \times \Omega \setminus \Delta)$, *dove* Δ *denota la diagonale di* $\Omega \times \Omega$.

Procedendo come nella dimostrazione del "Lemma del supporto singolare" per distribuzioni, si prova:

5. Lemma. *Se* T *è un'applicazione lineare continua di* $G_0^{(\theta)}(\Omega)$ *in* $G^{(\theta)}(\Omega)$ *che si estende ad un'applicazione lineare continua di* $G^{(\theta)'}(\Omega)$ *in* $G_0^{(\theta)'}(\Omega)$, *e se inoltre il corrispondente nucleo è in* $G^{(\theta)}(\Omega \times \Omega \setminus \Delta)$, *allora per ogni* $u \in G^{(\theta)'}(\Omega)$:

$$\theta\text{ - sing supp } Tu \subset \theta\text{ - sing supp } u \quad .$$

Dal Lemma 2, tenuto conto del Teorema 2 e del Lemma 4 discende subito:

6. Teorema. *Ogni* $P(\cdot,D) \in OPS^{\infty,\theta}_{\rho,\delta}(\Omega)$ *è* θ *pseudolocale* (cioè: θ-sing supp $P(\cdot,D)u \subset \theta$-sing supp u, per ogni $u \in G^{(\theta)'}(\Omega)$).

Come è usuale nel calcolo simbolico, è utile considerare oltre ai simboli in $S^{\infty,\theta}_{\rho,\delta}(\Omega)$ anche serie formali asintotiche di tali simboli.

7. Definizione. *Indicheremo con* $SF^{\infty,\theta}_{\rho,\delta}(\Omega)$ *lo spazio di tutte la serie formali* $\sum_{j\geq 0} p_j(x,\xi)$ *dove* $p_j \in C^{\infty}(\Omega \times \mathbf{R}^n)$ *soddisfa la seguente condizione:*

per ogni compatto $K \subset \Omega$ esistono costanti C *e* B *e per ogni* $\varepsilon > 0$ *una costante* c_ε *tale che:*

$$|D^{\alpha}_{\xi} D^{\beta}_{x} p_j(x,\xi)| \leq c_{\varepsilon}\, C^{|\alpha+\beta|+j}\, \alpha!(\beta!\, j!)^{\theta(\rho-\delta)}(1+|\xi|)^{-\rho|\alpha|+\delta|\beta|-(\rho-\delta)j} \exp(\varepsilon|\xi|^{1/\theta}).$$

per $\alpha,\beta \in \mathbf{Z}^n_+$ *e per* $x \in K$, $\xi \in \mathbf{R}^n$ *con* $|\xi| \geq B(j+|\alpha|)^{\theta}$.

Sia $p \in S^{\infty,\theta}_{\rho,\delta}(\Omega)$, $p_0 = p$, $p_j = 0$ per ogni $j > 0$; allora $\sum_{j\geq 0} p_j \in SF^{\infty,\theta}_{\rho,\delta}(\Omega)$. Sicché, identificando p con $\sum_{j\geq 0} p_j$, otteniamo la naturale inclusione.

$$(3) \qquad S^{\infty,\theta}_{\rho,\delta}(\Omega) \subset SF^{\infty,\theta}_{\rho,\delta}(\Omega) .$$

Nella classe $SF^{\infty,\theta}_{\rho,\delta}(\Omega)$ introduciamo la seguente relazione di equivalenza:

8. Definizione. $\sum_{j\geq 0} p_j$ e $\sum_{j\geq 0} q_j \in SF^{\infty,\theta}_{\rho,\delta}(\Omega)$ *si dicano equivalenti* ($\sum_{j\geq 0} p_j \sim \sum_{j\geq 0} q_j$) *se, per ogni sottoinsieme compatto* $K \subset \Omega$ *esistono costanti* C e B *e per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste una costante* c_ε *tale che:*

$$|D^\alpha_\xi D^\beta_x \sum_{j<s} (p_j(x,\xi) - q_j(x,\xi))| \leqq c_\varepsilon C^{|\alpha+\beta|+s} \alpha!(\beta!\, s!)^{\theta(\rho-\delta)}$$

$$(1+|\xi|)^{-\rho|\alpha| + \delta|\beta| - (\rho\ \delta)s} \exp(\varepsilon|\xi|^{1/\theta}) ,$$

per $\alpha, \beta \in \mathbf{Z}^n_+$, $x \in K$, $\xi \in \mathbf{R}^n$ *con* $|\xi| \geqq B(s + |\alpha|)^\theta$, $s > 0$.

Resta così definita, tenuto conto di (3), una relazione di equivalenza in $S^{\infty,\theta}_{\rho,\delta}(\Omega)$.

Indicheremo con $V^\theta_R(\Omega)$ lo spazio degli operatori θ-regolarizzanti in Ω, cioè lo spazio di tutti gli operatori lineari continui da $G^{(\theta)}_0(\Omega)$ a $G^{(\theta)}(\Omega)$ che si prolungano ad operatori lineari continui da $\grave{G}^{(\theta)\prime}(\Omega)$ a $G^{(\theta)}(\Omega)$.

Dalla Definizione 8 segue:

9. Proposizione. *Se* $p \sim 0$ *in* $SF^{\infty,\theta}_{\rho,\delta}(\Omega)$ *allora* $P(\cdot, D) \in V^\theta_R(\Omega)$.

Come per gli operatori pseudodifferenziali classici, ad ogni simbolo formale si può associare un simbolo vero. Si ha infatti:

10. <u>Teorema</u>. *Per ogni* $\sum_{j\geq 0} p_j \in SF^{\infty,\theta}_{\rho,\delta}(\Omega)$ *esiste un* $p \in S^{\infty,\theta}_{\rho,\delta}(\Omega)$ *tale che* $p \sim \sum_{j\geq 0} p_j$ *in* $SF^{\infty,\theta}_{\rho,\delta}(\Omega)$.

Si ottiene p come somma di una serie $\sum_{j\geq 0} \phi_j(\xi)\, p_j(x,\xi)$, dove $\{\phi_j\}$ è una successione di funzioni indefinitamente differenziabili tali che $0 \leq \phi_j \leq 1$, $\phi_j(\xi) = 0$ se $|\xi| < 2R \sup(j^\theta, 1)$, $\phi_j(\xi) = 1$ se $|\xi| > 3\, R \sup(j^\theta, 1)$ e $|D^\alpha \phi_j| \leq \left(\frac{c}{Rj^{\theta-1}}\right)^{|\alpha|}$ se $|\alpha| \leq 2j$ (R è una costante positiva che viene scelta opportunamente nel corso della dimostrazione).

Per quel che riguarda la composizione dei simboli valgono le regole usuali del calcolo simbolico.

11. <u>Definizione</u>. *Se* $p, q \in S^{\infty,\theta}_{\rho,\delta}(\Omega)$, $p \circ q$ *è la serie formale* $\sum_{j\geq 0} r_j$ *con* $r_j(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=j} (\alpha!)^{-1}\, \partial^\alpha_\xi p(x,\xi)\, D^\alpha_x q(x,\xi)$.

Più generalmente se $\sum_{j\geq 0} p_j, \sum_{j\geq 0} q_j \in SF^{\infty,\theta}_{\rho,\delta}(\Omega)$ *allora* $(\sum_{j\geq 0} p_j) \circ (\sum_{j\geq 0} p_j) = \sum_{j\geq 0} r_j$ *dove* $r_j(x,\xi) = \sum_{|\alpha|+h+k=j} (\alpha!)^{-1} \partial^\alpha_\xi p_h(x,\xi) D^\alpha_x q_k(x,\xi)$.

Applicando la regola di Leibniz si ottiene subito:

12. <u>Proposizione</u>. $(\sum_{j\geq 0} p_j) \circ (\sum_{j\geq 0} q_j) \in SF^{\infty,\theta}_{\rho,\delta}(\Omega)$.

Se $\sum_{j\geq 0} p'_j \sim \sum_{j\geq 0} p_j$, $\sum_{j\geq 0} q'_j \sim \sum_{j\geq 0} q_j$ *allora* $(\sum_{j\geq 0} p'_j) \circ (\sum_{j\geq 0} q'_j) \sim$ $\sim (\sum_{j\geq 0} p_j) \circ (\sum_{j\geq 0} q_j)$.

13. <u>Definizione</u>. *Se* $p \in S^{\infty,\theta}_{\rho,\delta}(\Omega)$ *il trasporto di* p, $p^\#$ *è la serie formale* $\sum_{j\geq 0} q_j$, *dove* $q_j(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=j} (\alpha!)^{-1}\, \partial^\alpha_\xi D^\alpha_x\, p(x,-\xi)$.

In modo analogo si definisce $(\sum_{j\geq 0} p_j)^\#$ se $\sum_{j\geq 0} p_j \in SF^{\infty,\theta}_{\rho,\delta}(\Omega)$, *ponendo*

$$(\sum_{j\geq 0} p_j)^{\#} = \sum_{j\geq 0} q_j, \text{ con } q_j(x,\xi) = \sum_{|\alpha|+h=j} (\alpha!)^{-1}\partial_\xi^\alpha D_x^\alpha \; p_j(x,-\xi).$$

14. Proposizione. *Se* $\sum_{j\geq 0} p_j \in SF^{\infty,\theta}_{\rho,\delta}(\Omega)$ *allora* $(\sum_{J\geq 0} p_j)^{\#} \in SF^{\infty,\theta}_{\rho,\delta}(\Omega)$ e $(\sum_{j\geq 0} p_j^{\#})^{\#} \sim \sum_{j\geq 0} p_j$.

Applicando le regole del calcolo simboloci si ottiene ora il seguente:

15. Teorema. *Sia* $p \in S^{\infty,\theta}_{\rho,\delta}(\Omega)$. *Supponiamo che esistano un aperto* Ω_1 *relativamente compatto in* Ω, *costanti positive* C, B_1, B_2 *e per ogni* ε *una costante* c_ε *tali che:*

$$|p(x,\xi)| \geq c_\varepsilon \exp(-\varepsilon\, |\xi|^{1/\theta}) \qquad x \in \Omega_1 \quad , \quad |\xi| > B_1;$$

$$|D_\xi^\alpha D_x^\beta \, p(x,\xi)| \leq c^{|\alpha+\beta|} \; \alpha! \; \beta!^{\theta(\rho-\delta)} (1+|\xi|)^{-\rho|\alpha| + \delta|\beta|} \; |p(x,\xi)|,$$

$$x \in \Omega_1, \; |\xi| > B_2|\alpha|^\theta \quad , \; |\xi| > B_1 \quad , \quad \alpha,\beta \in \mathbf{Z}^n_+.$$

Allora esiste $q \in S^{\infty,\theta}_{\rho,\delta}(\Omega)$ *tale che* $q \circ p \sim 1$ in $SF^{\infty,\theta}_{\rho,\delta}(\Omega)$.

Con un procedimento usuale nella teoria degli operatori pseudodifferenziali, allargheremo la classe di operatori definita precedentemente considerando operatori della forma:

$$Au(x) = (2\pi)^{-n} \iint \exp(i\langle x-y,\xi\rangle) \; a\;(x,y,\xi)u(y)dy\; d\xi \; , \tag{4}$$

dove l'ampiezza $a(x,y,\xi)$ è supposta appartenere ad uno degli spazi indicati nella Definizione 16. Proveremo poi che tali operatori coincidono, a meno di un operatore θ-regolarizzante, con gli operatori definiti da (2).

16. Definizione. *Indicheremo con* $\tilde{S}^{\infty,\theta}_{\rho,\delta}(\Omega)$ *lo spazio delle fun*

zioni $a(x,y,\xi) \in C^{\infty}(\Omega \times \Omega \times \mathbf{R}^n)$ *soddisfacenti la seguente condizione:*

per ogni sottoinsieme compatto $W \subset \Omega \times \Omega$ *esistono costanti* C e B, *e per ogni* $\varepsilon > 0$ *una costante* c_ε *tale che:*

$$(5) \quad |D_\xi^\alpha D_x^\beta D_y^\gamma a(x,y,\xi)| \leq c_\varepsilon C^{|\alpha+\beta+\gamma|} \alpha!(\beta!\gamma!)^{\theta(\rho-\delta)}(1+|\xi|)^{-\rho|\alpha|+\delta|\beta+\gamma|} \exp(\varepsilon|\xi|^{1/\theta}),$$

per $\alpha, \beta, \gamma \in Z_+^n$ *e per* $(x,y) \in W$, $\xi \in \mathbf{R}^n$ *con* $|\xi| \geq B|\alpha|^\theta$.

Per il Lemma 3, se $a(x,y,\xi)$ verifica (5) e $u \in G_0^{(\theta)}(\Omega)$ allora per ogni compatto $K \subset \Omega$ esistono costanti c, b, $\varepsilon > 0$ tali che:

$$|\int \exp(-i\langle y,\xi\rangle)\, a(x,y,\xi)\, u(y)\, dy| \leq c \exp(-\varepsilon|\xi|^{1/\theta}) \quad , \quad x \in K, \quad |\xi| > b.$$

Pertanto l'operatore (4) è ben definito per $u \in G_0^{(\theta)}(\Omega)$ e $Au \in G^{(\theta)}(\Omega)$. Inoltre l'applicazione $A: G_0^{(\theta)}(\Omega) \to G^{(\theta)}(\Omega)$ è continua.

17. Definizione. *Indicheremo con* $OP\tilde{S}^{\infty,\theta}_{\rho,\delta}(\Omega)$ *lo spazio degli operatori della forma* (4) *con* $a \in \tilde{S}^{\infty,\theta}_{\rho,\delta}(\Omega)$.

Possiamo ora definire il nucleo K di $A \in OP\tilde{S}^{\infty,\theta}_{\rho,\delta}(\Omega)$ come per gli operatori in $OPS^{\infty,\theta}_{\rho,\delta}(\Omega)$. Formalmente:

$$K(x,y) = (2\pi)^{-u} \int \exp(i\langle x-y,\xi\rangle)\, a(x,y,\xi)\, d\xi$$

dove a è l'ampiezza di A. Si può provare che $K \in G^{(\theta)}(\Omega \times \Omega \setminus \Delta)$.

18. Osservazione. Ogni operatore $A \in V_R^\theta(\Omega)$ può essere rappresentato da (4) con $a \in \tilde{S}^{\infty,\theta}_{1,0}(\Omega)$ e soddisfacente la condizione: per ogni sottoinsieme compatto $W \subset \Omega \times \Omega$ esistono costanti c, $h > 0$ tali che:

$$|D_x^\beta D_y^\gamma a(x,y,\xi)| \leq c^{|\beta+\gamma|+1} (\beta+\gamma)!^\theta \exp(-h|\xi|^{1/\theta})$$

per ogni $(x,y) \in W$, $\xi \in \mathbf{R}^n$, $\beta, \gamma \in \mathbf{Z}_+^n$.

Abbiamo ora il seguente:

19. <u>Teorema</u>. *Sia* $A \in OP\tilde{S}^{\infty,\theta}_{\rho,\delta}(\Omega)$. *Esiste* $P(\cdot,D) \in OPS^{\infty,\theta}_{\rho,\delta}(\Omega)$ *tale che* $A - P(\cdot,D) \in V_R^\theta(\Omega)$. *Inoltre, se* a *è l'ampiezza di* A, *allora* $p(x,\xi) \sim \sum_\alpha (\alpha!)^{-1} \partial_\xi^\alpha D_x^\alpha a(x,y,\xi)_{|y=x}$ in $SF^{\infty,\theta}_{\rho,\delta}(\Omega)$.

Le seguenti proposizioni sono immediate conseguenze del teorema 19.

20. <u>Proposizione</u>. Se $P(\cdot,D) \in OPS^{\infty,\theta}_{\rho,\delta}(\Omega)$ allora ${}^tP(\cdot,D) \in OP\tilde{S}^{\infty,\theta}_{\rho,\delta}(\Omega)$ ed ha ampiezza $p(y,-\xi)$. Inoltre, esiste $q(\cdot,D) \in OPS^{\infty,\theta}_{\rho,\delta}(\Omega)$ con simbolo $q(x,\xi) \sim p^{\#}(x,\xi)$ tale che ${}^tP(\cdot,D) - Q(\cdot,D) \in V_R^\theta(\Omega)$.

21. <u>Proposizione</u>. *Se* $A \in OP\tilde{S}^{\infty,\theta}_{\rho,\delta}(\Omega)$ *allora esiste* $B \in OP\tilde{S}^{\infty,\theta}_{\rho,\delta}(\Omega)$ *con ampiezza* $b(y,\xi)$ *dipendente solo da* y *tale che* $A - B \in V_R^\theta(\Omega)$. *In particolare se* $A = q(\cdot, D) \in OPS^{\infty,\theta}_{\rho,\delta}(\Omega)$, *allora* $b(y,\xi) \sim q^{\#}(y,-\xi)$ *in* $SF^{\infty,\theta}_{\rho,\delta}(\Omega)$.

Diremo che un operatore $A \in OP\tilde{S}^{\infty,\theta}_{\rho,\delta}(\Omega)$ è propriamente supportato se il suo nucleo K è una θ-ultradistribuzione propriamente supportata; cioè se supp K ha intersezione compatta con $H \times \Omega$ e con $\Omega \times H$ per ogni sottoinsieme compatto $H \subset \Omega$. Alternativamente, K è propriamente supportato su K e ${}^tK$ sono operatori continui da $G_0^{(\theta)}(\Omega)$ a $G^{(\theta)'}(\Omega)$.

Un operatore $A \in OP\tilde{S}^{\infty,\theta}_{\rho,\delta}(\Omega)$ propriamente supportato applica $G^{(\theta)}(\Omega)$ in $G^{(\theta)}(\Omega)$ e $G_0^{(\theta)}(\Omega)$ in $G_0^{(\theta)}(\Omega)$.

Se $A, B \in OP\tilde{S}^{\infty,\theta}_{\rho,\delta}(\Omega)$ ed uno almeno è propriamente supportato, allora $A\,B \in OP\tilde{S}^{\infty,\theta}_{\rho,\delta}(\Omega)$. Inoltre abbiamo:

22. Teorema. *Siano* $P(\cdot,D)$, $Q(\cdot,D) \in OPS^{\infty,\theta}_{\rho,\delta}(\Omega)$. *Supponiamo che uno almeno sia propriamente supportato. Allora* $P(\cdot,D)\,Q(\cdot,D) = T(\cdot,D) + R$, *dove* $t(x,\xi) \sim p(x,\xi) \circ q(x,\xi)$ *in* $SF^{\infty,\theta}_{\rho,\delta}(\Omega)$ *e* $R \in V^{\theta}_{R}(\Omega)$.

Dai Teoremi 15, 22, 6 segue subito:

23. Teorema. *Sia* $P(\cdot,D) \in OPS^{\infty,\theta}_{\rho,\delta}(\Omega)$. *Se* $p(x,\xi)$ *soddisfa le ipotesi del Teorema 15 in un aperto* Ω_1 *relativamente compatto in* Ω, *allora esiste un operatore* $Q \in OPS^{\infty,\theta}_{\rho,\delta}(\Omega)$ *tale che* $QP = I + R$, *con* $R \in V^{\theta}_{R}(\Omega)$. *Quindi per ogni* $u \in G^{(\theta)'}(\Omega_1)$.

$$\theta\text{-sing supp } u \subset \theta\text{-sing supp } Pu.$$

(θ-sing supp u designa il complementare in Ω_1 dell'unione degli aperti $\Omega' \subset \Omega_1$ tali che $u \in G^{(\theta)}(\Omega')$).

BIBLIOGRAFIA

[1] AOKI, T. "Invertibility for microdifferential operators of infinite order", Publ. RIMS, Kyoto Univ., 18 (1982), 1-29.

[2] AOKI, T. "The exponential calculus of microdifferential operators of infinite order" I, II, III, IV, Proc. Japan Acad. 58, Sez. A. (1982), 58-61; 58(1982), 154-157; 59(1983), 79-82; 59(1983), 186-187.

[3] BEALS, R. "A general calculus of pseudodifferential operators", Duke Math. J. 42 (1975), 1-42.

[4] BOUTET de MONVEL, L. "Opérateurs pseudo-differentials analytiques et opérateurs d'ordre infini", Ann. Inst. Fourier, 22 (1972), 229-268.

[5] BOUTET de MONVEL, L. - KREE, P. "Pseudodifferential operators and Gevrey classes", Ann. Inst. Fourier, 17 (1967), 295-323.

[6] HASHIMOTO, S. - MATSUZAWA, T. - MORIMOTO, Y. "Opérateurs pseudodif ferentials et classes de Gevrey", Comm. in Part. Diff. Eq. 8 (12) (1983), 1277-1289.

[7] HÖRMANDER, L. "Pseudodifferential operators and hypoelliptic equations", Proc. Symp. Pure Math. (A.M.S., Providence, R.I.), 10 (1967), 138-183.

[8] IFTIMIE, V. "Operateurs hypoelliptiques dan les espaces de Gevrey", Bull. Soc. Sci. Math. Roumanie, 27 (1983), 317-333.

[9] KOMATSU, H. "Ultradistributions I. Structures theorems and a caracte rization", J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, 20 (1973), 25-105.

[10] KOMATSU, H. "Ultradistributions II; The Kernel theorem and ultra-distributions with support in a manifold", J. Foc. Sci. Univ. Tokyo, 24 (1977), 607-628.

[11] LIESS, O. - RODINO, L. "Inhomogeneous Gevrey classes and related pseudodifferential operators", Bollettino U.M.I. Analisi Funz. e Appl. Serie VI, Vol. III-c, n. 1(1984), 233-323.

[12] VOLEVIC, L.R. "Pseudodifferential operators with holomorphic symbols and Gevrey classes", Trudy Moscov. Met. Obsc. 24 (1971), 43-68; (Trans. Moscav. Math. Soc., 24 (1974), 43-72).